第 21 卷 第 1 期
1999 年 1 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.21 No.1
Jan. 1999

基于积分方程的阵列信号的反演方法 [1]

杨 峰　　聂在平　　赵延文　　张业荣 *

(电子科技大学微波工程系 成都 610054)
*(华中理工大学电信系 武汉 430074)

摘 要 本文将收敛速度快的变形玻恩迭代法 (DBIM) 结合数值模式匹配法 (NMM) 用于实际工程中的阵列感应成象仪 (AIT) 的测量信号的反演和剖面成象。在反演迭代过程中，利用 NMM 解的 z 向解析性质，避免了双重数值积分，提高了计算效率，同时也提高了反演质量。文中利用不完备的测量数据对 AIT 进行了反演，表明该方法非常适合实际工程应用。

关键词 逆散射，阵列感应成象仪，变形玻恩迭代，数值模式匹配法
中图号 O441

1 引 言

电磁逆散射是当今电磁学研究的热点之一。它已被广泛应用于地球物理勘探、医学成象、目标识别以及材料无损伤检测等实际工程领域中。仅以地球物理应用而言，近年就吸引了众多学者的研究 [1–4]。众所周知，收、发线圈系之间有很强的直耦信号，要在这么强的背景场中提取散射场信息是非常困难的，所以在实际工程中为了对消直耦信号通常采用复合线圈系。实际工程中常用的阵列感应成象仪 (AIT) 就是根据几何因子理论，用软件聚焦的方式来提高其纵向分辨率和增加径向探测深度。由于几何因子理论是建立在均匀介质模型基础上，又没考虑非线性部分，所以是一种近似方法，其解释效果必然受到了限制。

本文就是针对 AIT，基于严格的积分方程出发，在非均匀背景介质中采用了变形玻恩迭代法 (DBIM) 来重建二维轴对称介质结构的电导率分布。由于该方法在反演迭代过程中需要多次调用正演算法，所以选用一种高效精确的正演方法是提高反演质量和计算效率的关键。本文中正演方法选用了高效的数值模式匹配法 (NMM)。由于 NMM 解在 z 向的解析性质，故其在反演过程中 z 向积分有解析解，加之径向用线性插值方法，避免了双重数值积分，与采用数值积分方法 [4] 相比，其计算效率提高了一个数量级。

2 非线性积分方程的建立和变形玻恩迭代法

在二维轴对称非均匀介质中，假设磁导率 $\mu(\rho,z)\equiv\mu_0$，则只有电导率 $\sigma=\sigma(\rho,z)$ 和介电常数 $\epsilon=\epsilon(\rho,z)$ 是 ρ 和 z 向函数。在上述条件下，位于轴线上细环天线仅产生 E_Φ 分量的场，其散射场满足以下积分方程 [5]：

$$E_\phi^{\rm scat}(\rho,z,\rho_t,z_t)=\frac{1}{i\omega\mu_0 I}\int_{-\infty}^{+\infty}{\rm d}z'\int_0^{+\infty}{\rm d}\rho' E_\phi^{\rm inc}(\rho,z,\rho',z')\delta O(\rho',z')E_\phi(\rho',z',\rho_t,z_t). \qquad (1)$$

上式右端 $E_\phi(\rho',z',\rho_t,z_t)$ 也是目标函数 $\delta O(\rho',z')$ 的函数，所以 (1) 式是非线性积分方程。

[1] 1997-07-11 收到， 1998-06-05 定稿
国家自然科学基金资助项目

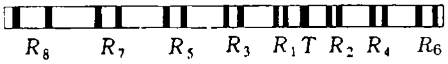

图 1 阵列感应成象仪示意图

由于我们所考虑的是实际工程中所应用的复杂线圈系——阵列感应成象仪 (AIT)，它是由八对三线圈系基本单元组成的，每单元是由一个发射天线和两个绕向相反经直耦信号对消的接收天线构成，如图 1 所示。

对于 AIT 的三线圈系单元，各接收线圈对上的接收场应为

$$E_m(\rho_2,z_2,\rho_1,z_1,\rho_t,z_t)=N_{21}E_\phi(\rho_2,z_2,\rho_t,z_t)-E_\phi(\rho_1,z_1,\rho_t,z_t), \tag{2}$$

式中 N_{21} 为线圈对的匝数比。由 (1) 式和互易定理可将上式写为

$$\begin{aligned}&E_m(\rho_2,z_2,\rho_1,z_1,\rho_t,z_t)-[N_{21}E_\phi^{\mathrm{inc}}(\rho_2,z_2,\rho_t,z_t)-E_\phi^{\mathrm{inc}}(\rho_1,z_1,\rho_t,z_t)]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z'\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\rho'[N_{21}E_\phi(\rho',z',\rho_2,z_2)-E_\phi(\rho',z',\rho_1,z_1)]\delta O(\rho',z')E_\phi(\rho',z',\rho_t,z_t).\end{aligned} \tag{3}$$

在弱散射情形下可应用玻恩近似，令积分号中的 $E_\phi(\rho',z',\rho_t,z_t)\approx E_\phi^{\mathrm{inc}}(\rho',z',\rho_t,z_t)$，而入射场只与背景介质有关，与 $\delta O(\rho',z')$ 无关，故将 (3) 式积分方程线性化。

为求出未知目标区的电导率,需把目标区的剖面分布离散化,并按脉冲基函数序列 $\{f_j(\rho,z)\}$ 离散 (3) 式，得到如下矩阵方程：

$$\boldsymbol{e}=\overline{\boldsymbol{M}}\cdot\boldsymbol{a} \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{e}$ 表示测量数据矢量 (N_n 个元素)，$\boldsymbol{a}$ 是指目标函数矢量 (N_m 个元素)，$\overline{\boldsymbol{M}}$ 为 $N_n\times N_m$ 的矩阵，其矩阵元素表示为

$$\begin{aligned}M_{l,n,j}=\frac{1}{I_n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z'\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\rho' f_j(\rho',z')[N_{21}E_\phi(\rho',z',\rho_{2l},z_{2l})\\-E_\phi(\rho',z',\rho_{1l},z_{1l}]E_\phi^{\mathrm{inc}}(\rho',z',\rho_{tn},z_{tn}),\end{aligned} \tag{5}$$

上式中 n 和 l 分别表示第 n 个发射线圈和第 l 个接收线圈对。

反演问题也就归结为求解 (4) 式中的 $\boldsymbol{a}$，由于 (4) 式具有不适定性，通过 Tihonov 正则化方法将其变为适定问题。首先应构造一代价函数：

$$C(\boldsymbol{a})=\|\boldsymbol{e}-\overline{\boldsymbol{M}}\cdot\boldsymbol{a}\|^2+\gamma\|\overline{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{a}\|^2, \tag{6}$$

式中 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 为正则化矩阵 (文中应用单位矩阵)， γ 为正则化参数。要使 (4) 式有稳定的解，那么 (6) 式的范数应最小，即变分为零，由此可得

$$\boldsymbol{a}=(\overline{\boldsymbol{M}}^+\cdot\overline{\boldsymbol{M}}+\gamma\overline{\boldsymbol{R}}^+\cdot\overline{\boldsymbol{R}})^{-1}\cdot\overline{\boldsymbol{M}}^+\cdot\boldsymbol{e}. \tag{7}$$

式中 $^+$ 表示复共轭转置. 本文采用共轭梯度法求解该方程便可求得 a。在第一次 DBIM 中，首先对 $\boldsymbol{a}$ 赋一初值，通过解 (7) 式中的 $\boldsymbol{a}$ 去更新背景介质中的电导率分布，在新的背景介质中计算背景介质的入射场 E_ϕ^{inc}，再通过解 (7) 式又可得到新的电导率分布，迭代过程进行到散射场的计算值和测量值之间的相对剩余误差 (RRE) 小于给定值时迭代结束，此时求得的电导率分布便是介质结构的电参数分布的重建结果。

3　高效的正演方法——数值模式匹配法

利用 DBIM 进行反演时，每次迭代均要调用正演程序。正演计算本文采用了高效的 NMM，各区的场由文献 [6] 可知，其中源区 (p) 的场表示为

$$\rho E_{p\phi}=\begin{cases}-\dfrac{\omega I}{2}\boldsymbol{f}_p^t(\rho)[e^{ik_{pz}z}+e^{-ik_{pz}(z-d_p)}\boldsymbol{G}_{p,p+1}e^{ik_{pz}d_p}]\boldsymbol{A}_p\dfrac{\boldsymbol{f}_p(\rho')}{\boldsymbol{k}_{pz}\boldsymbol{D}_p}, & (z\ge z');\\ -\dfrac{\omega I}{2}\boldsymbol{f}_p^t(\rho)[e^{-ik_{pz}z}+e^{ik_{pz}(z-d_{p-1})}\boldsymbol{G}_{p,p-1}e^{-ik_{pz}d_{p-1}}]\boldsymbol{B}_p\dfrac{\boldsymbol{f}_p(\rho')}{\boldsymbol{k}_{pz}\boldsymbol{D}_p}, & (z<z').\end{cases}\tag{8}$$

在源上方区域的场 $(n>p)$ 中，

$$\rho E_{n\phi}=-\frac{\omega I}{2}\boldsymbol{f}_n^t(\rho)[e^{ik_{nz}(z-d_{n-1})}+e^{-ik_{pz}(z-d_n)}\boldsymbol{G}_{n,n+1}e^{ik_{nz}(d_n-d_{n-1})}]\boldsymbol{A}_n\frac{\boldsymbol{f}_p(\rho')}{\boldsymbol{k}_{pz}\boldsymbol{D}_p}.\tag{9}$$

在源下方区域的场 $(m<p)$ 中，

$$\rho E_{m\phi}=-\frac{\omega I}{2}\boldsymbol{f}_m^t(\rho)[e^{ik_{mz}(d_m-z)}+e^{ik_{mz}(z-d_{m-1})}\boldsymbol{G}_{n,n-1}e^{ik_{mz}(d_n-d_{m-1})}]\boldsymbol{B}_m\frac{\boldsymbol{f}_p(\rho')}{\boldsymbol{k}_{pz}\boldsymbol{D}_p}.\tag{10}$$

上式中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为场幅； $\boldsymbol{G}$ 为广义反射系数矩阵，它计入界面的多次反射效应； $\boldsymbol{f}_n(\rho)$ 则表示第 n 层的径向本征模，径向格点间的本征值由线性插值得到，即

$$\boldsymbol{f}_n(\rho)=\boldsymbol{k}_r\rho+\boldsymbol{b}_r.\tag{11}$$

4　二重积分的解析解

由 (5) 式可知， $\boldsymbol{M}$ 矩阵元素是由两个场乘积的二重积分得到. 我们知道计算二重数值积分是非常繁锁的，尤其是在积分区域比较大以及计算精度要求较高时，使计算量显著增加，甚至计算机都无法运算. 径向的数值本征模经线性插值后也可表示成直线方程，其径向积分非常容易。为讨论方便我们假定收、发线圈均在目标区下方，场由 (9) 式来表达，那么 z 向积分可写为下式：

$$\int_{d_{n-1}}^{d_n}E_\Phi(\rho',z',\rho_{rl},z_{rl})E_\Phi(\rho',z',\rho_{tn},z_{tn})\mathrm{d}z'=M_z^1+M_z^2+M_z^3+M_z^4,\tag{12}$$

其中

$$M_z^1=\frac{-i}{k_t+k_r}[e^{ik_t(d_n-d_{n-1})}e^{ik_r(d_n-d_{n-1})}-1.0];\tag{13}$$

$$M_z^2=\begin{cases}\dfrac{-i}{k_t-k_r}[e^{i(k_t+k_r)(d_n-d_{n-1})}-e^{2ik_r(d_n-d_{n-1})}], & k_t\ne k_r;\\ (d_n-d_{n-1})e^{2ik_r(d_n-d_{n-1})}, & k_t=k_r;\end{cases}\tag{14}$$

$$M_z^3=\begin{cases}\dfrac{i}{k_t-k_r}[e^{2ik_t(d_n-d_{n-1})}-e^{i(k_t+k_r)(d_n-d_{n-1})}], & k_t\ne k_r;\\ (d_n-d_{n-1})e^{2ik_r(d_n-d_{n-1})}, & k_t=k_r;\end{cases}\tag{15}$$

$$M_z^4=\frac{i}{k_t+k_r}[e^{2i(k_t+k_r)(d_n-d_{n-1})}-e^{i(k_t+k_r)(d_n-d_{n-1})}];\tag{16}$$

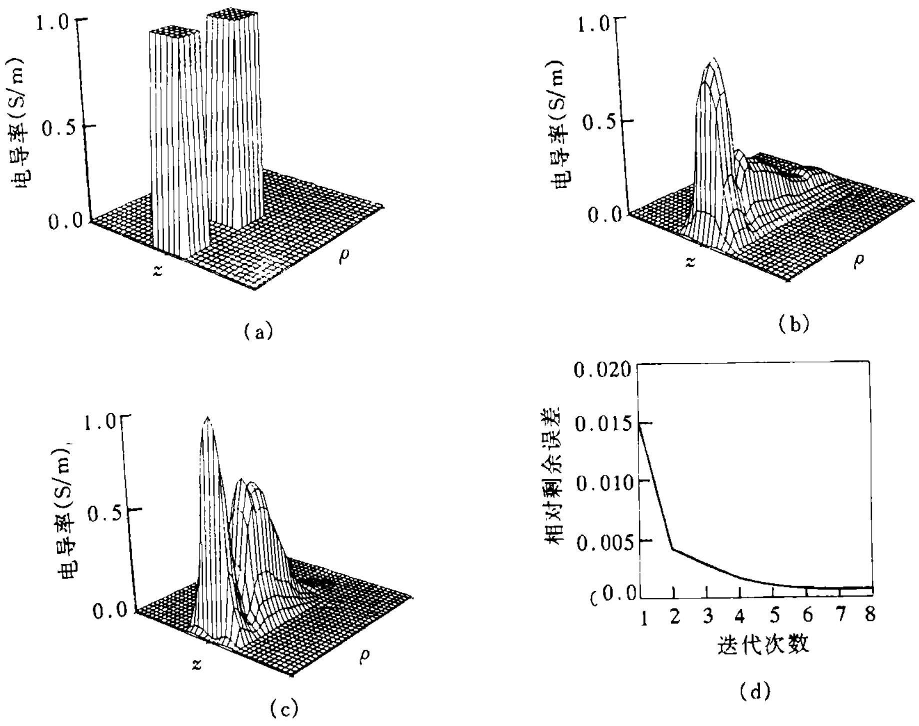

图 2　不完备测量信息的径向反演结果：(a) 原电导率分布；(b) 第一次 DBIM 迭代结果；(c) 第八次 DBIM 迭代结果；(d) 场的相对剩余误差

k_t 和 k_r 是目标区的本征值。其它几种情况也可类似得到。此时在计算 $\overline{M}$ 矩阵时就避免了二重数值积分，大大提高了计算效率，在大区域反演时效果尤为明显。

5　数值计算结果及结论

在以下例子中，背景介质均取为非均匀介质结构，即井外背景介质电导率和井内电导率分别为 0.01S/m 、 0.1S/m ，所使用频率为 20kHz ，对图 1 所示的阵列感应成象仪的测量数据进行反演。由于仪器在井下是沿井轴移动测量，对径向剖面而言其测量数据是不完备的，实际工程应用中通常是串接径向探测深度不同的仪器组合使用，希望获得不同径向深度的电导率，即使是这样也很难获得满意的结果。现在我们来考查一下仪器的径向和纵向分辨率。图 2(a) 是两个 0.25m×0.25m 相距 0.25m 的真实电导率分布，图 2(b) 是 DBIM 第一次迭代结果，它还分辨不出第二个介质块，图 2(c) 是 DBIM 第八次迭代结果，它已经非常清晰地分辨出两个介质块。图 3(a) 是两个 0.15m×0.75m 相距 0.15m 的真实电导率分布，图 3(b) 是 DBIM 第一次迭代结果，其分辨的效果并不好，图 3(c) 是 DBIM 第八次迭代结果，它已经能够很好地分辨出两个介质块，而且其最大值已接近真值。上面两个例子说明，用 DBIM 方法对 AIT 成象具有很高的径向和纵向分辨率，而用传统的软件聚焦的方法是达不到这样的效果。

本文将变形玻恩迭代方法并结合数值模式匹配理论应用于阵列感应测井的成象。由于 NMM 是半解析半数值的方法，利用其解的 z 向解析性质可获得 z 向积分的解析结果，而在径向格点间我们采用了线性插值的方法，从而避免了积分方程中的二重数值积分。与数值积

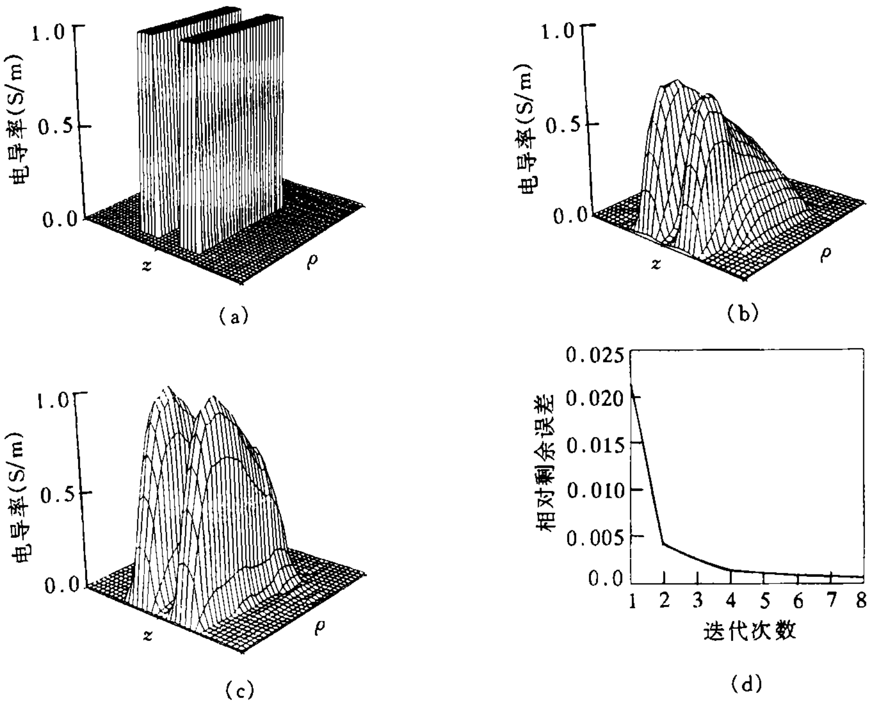

图 3　不完备测量信息的纵向反演结果： (a) 原电导率分布； (b) 第一次 DBIM 迭代结果； (c) 第八次 DBIM 迭代结果； (d) 场的相对剩余误差

分相比，这样做的好处是计算量显著减少，特别是对于大区块剖面的反演更显示出其明显的优越性。如利用 Pentium 133 微机在 NDP-FORTRAN V3.20 环境下，本征函数取 52 个，对图 2 所示 5×5 离散块， 56 个测试数据，迭代一次计算时间不超过 10min ，对厚层和大区域进行反演成象，计算工作量并不增加。通过上面的例子表明，经过适当的迭代次数后，反演结果已十分接近真实电导率分布。此方法非常适合实际的测井解释工作应用。

参　考　文　献

[1] Arikan O. Regularized inversion of a two-dimensional integral equation with applications in borehole induction measurement. Radio Sci., 1994, 29(3): 519–538.

[2] Habashy T M, Oristaglio M L, de Hoop A T. Simulataneous nonlinear reconstruction of two-dimensional permittivity and conductivity. Radio Sci., 1994, 29(4): 1101–1118.

[3] Chew W C, Liu Q H. Inversion of induction tool measurements using the distorted born iterative method and CG-FFHT. IEEE Trans. on GE, 1994, GE-32(4): 878–884.

[4] Liu Q H. Reconstruction of two-dimensional axisymmetric inhomogeneous media. IEEE Trans. on GE, 1993, GE-31(3): 587–594.

[5] 张业荣, 聂在平, 赵雄文. 低频电磁场重建二维非均匀介质的有效方法. 电波科学学报， 1997, 12(3): 233–241.

[6] 聂在平， Chew W C, Liu Q H. 电磁波对轴对称二维层状介质的散射. 地球物理学报， 1992, 35(4): 479–489.

INVERSION OF THE MEASURING DATA OF ARRAY INDUCTION IMAGER TOOL BASED ON THE INTEGRAL EQUATION

Yang Feng Nie Zaiping Zhao Yanwen Zhang Yerong*

(*Dept. of Microwave-Engin., Univ. of Electro. Science and Tech. of China, Chengdu* 610054)

*(*Dept. of Electro. Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074)

Abstract This paper deals with the profile reconstruction of the Array Induction Imager Tool(AIT) measurement using the Distorted Born Iterative Method(DBIM) and an efficient Numerical Mode-Matching(NMM) method for the conductivity distribution in a two-dimensional axisymmetric medium. In each iteration of DBIM, the NMM method is applied to solve a forward solver. Meanwhile, the analytic expression of the integration in the nonlinear integral equation has been derived and then the inversion of the efficiency and accuracy is improved dramatically. Several examples have shown that this method is practicable for the interpretation of electrical logging data.

Key words Inverse scattering, Array induction imager tool, Distorted Born iterative method, Numerical mode-matching method

杨 峰: 男, 1962 年生, 博士, 讲师, 主要研究兴趣为微波通信、电磁散射与逆散射和地球物理测井数值方法的研究.

聂在平: 男, 1946 年生, 电子科技大学副校长, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为复杂非均匀介质中的场与波, 电磁散射与逆散射, 天线理论, 计算电磁学等, 在国内外先后发表学术论文 100 余篇.

赵延文: 男, 1966 年生, 博士, 讲师, 研究兴趣为电磁散射与逆散射、电法测井数值模拟以及小波变换在地球物理勘探中的应用.

张业荣: 男, 1962 年生, 博士后, 从事电磁场中的数值计算, 电磁散射与逆散射, 微波传播, 地球物理测井理论和方法研究.